Πανελλαδικές Εξετάσεις Ελλήνων Εξωτερικού
Εξεταζόμενο μάθημα: Μαθηματικά Προσανατολισμού
Τρίτη 10 Σεπτεμβρίου 2024

Οι εκφωνήσεις μαζί με τις αναλυτικές λύσεις τους από την ομάδα του Ασκησόπολις

Θέμα Α

Α1. Έστω η συνάρτηση $f(x)=x$, $x\in\mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και ισχύει $f'(x)=1$.

Μονάδες 7

Α2. Πότε μία συνάρτηση f λέγεται γνησίως αύξουσα σε ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της;

Μονάδες 4

Α3. Να διατυπώσετε το θεώρημα Μέγιστης και Ελάχιστης Τιμής.

Μονάδες 4

Α4. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη Σωστό, αν η πρόταση είναι σωστή, ή Λάθος, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α) Ισχύει ότι $\lim\limits_{x\to 0}\left(x\eta\mu\frac{1}{x}\right)=0$.

β) Κάθε συνάρτηση f διατηρεί πρόσημο σε καθένα από τα διαστήματα στα οποία οι διαδοχικές ρίζες της χωρίζουν το πεδίο ορισμού της.

γ) Η συνάρτηση $f(x)=x^{\alpha}$, $\alpha\in\mathbb{R}-\mathbb{Z}$ είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ και ισχύει ότι $f'(x)=\alpha x^{\alpha-1}$.

δ) Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής σε ένα διάστημα Δ και $\alpha,\beta,\gamma\in\Delta$, τότε ισχύει

$$\int_{\alpha}^{\beta}f(x)dx=\int_{\alpha}^{\gamma}f(x)dx+\int_{\gamma}^{\beta}f(x)dx$$

ε) Αν $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)<0$, τότε $f(x)<0$ κοντά στο x_0 .

Μονάδες 10

Λύση

Α1. Αν $x_0\in\mathbb{R}$ τότε για $x\neq x_0$ ισχύει: $\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\dfrac{x-x_0}{x-x_0}=1$.

Επομένως, $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim\limits_{x\to x_0}1=1$, δηλαδή $(x)'=1$.

Α2. Μια συνάρτηση f λέγεται γνησίως αύξουσα σ' ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της, όταν για οποιαδήποτε $x_1,x_2\in\Delta$ με $x_1<x_2$ ισχύει $f(x_1)<f(x_2)$

Α3. Αν f είναι συνεχής συνάρτηση στο $[\alpha,\beta]$, τότε η f παίρνει στο $[\alpha,\beta]$ μια μέγιστη τιμή M και μια ελάχιστη τιμή m. Δηλαδή, υπάρχουν $x_1,x_2\in[\alpha,\beta]$ τέτοια, ώστε, αν $m=f(x_1)$ και $M=f(x_2)$, να ισχύει $m\le f(x)\le M$, για κάθε $x\in[\alpha,\beta]$.

Α4. α) Σωστό **β)** Λάθος **γ)** Σωστό **δ)** Σωστό **ε)** Σωστό

Θέμα Β

Δίνεται η συνάρτηση $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ με τύπο $f(x)=2\ln x-1$ και η συνάρτηση $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με τύπο $g(x)=x-2$.

Β1. Να προσδιορίσετε τη συνάρτηση $h=f\circ g$.

Μονάδες 6

Αν $h(x)=2\ln(x-2)-1,\ x>2$, τότε:

Β2. Να βρείτε τις πραγματικές τιμές του x για τις οποίες η γραφική παράσταση της συνάρτησης h βρίσκεται πάνω από την ευθεία $y=1$.

Μονάδες 6

Β3. Να δείξετε ότι η συνάρτηση h αντιστρέφεται (μονάδες 3) και να βρείτε την αντίστροφή της h^{-1} (μονάδες 4).

Μονάδες 7

Β4. Αν $h^{-1}(x)=2+e^{\frac{x+1}{2}}$, $x\in\mathbb{R}$, να εξετάσετε αν ικανοποιούνται οι υποθέσεις του θεωρήματος Rolle για τη συνάρτηση $f(x)=\left(h^{-1}(x)-3\right)\cdot\left(x^3-8\right)$ στο $[-1,2]$.

Μονάδες 6

Λύση

Β1. Η συνάρτηση $f\circ g$ ορίζεται όταν $\begin{cases}x\in D_g\\ g(x)\in D_f\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\in\mathbb{R}\\ x-2>0\end{cases}\Leftrightarrow x>2$.

Άρα είναι $h(x)=(f\circ g)(x)=f(g(x))=2\ln g(x)-1=2\ln(x-2)-1$, $x>2$.

Β2. Για κάθε $x>2$ είναι $h(x)>1\Leftrightarrow 2\ln(x-2)-1>1\Leftrightarrow 2\ln(x-2)>2\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \ln(x-2)>1\Leftrightarrow x-2>e\Leftrightarrow x>e+2$

Β3. <u>Αρχικά θα αποδείξουμε ότι η h αντιστρέφεται με 3 τρόπους:</u>

1ος τρόπος: (Με μονοτονία) Είναι $h'(x)=\dfrac{2}{x-2}>0$ για κάθε $x>2$ και η h συνεχής άρα $h\nearrow(2,+\infty)$ άρα 1-1 και αντιστρέφεται.

2ος τρόπος: Για κάθε $x_1,x_2\in(2,+\infty)$ με $h(x_1)=h(x_2)\Rightarrow 2\ln(x_1-2)-1=2\ln(x_2-2)-1\Rightarrow$

$\Rightarrow 2\ln(x_1-2)=2\ln(x_2-2)\Rightarrow \ln(x_1-2)=\ln(x_2-2)\Rightarrow x_1-2=x_2-2\Rightarrow x_1=x_2$ άρα η h είναι 1-1 και αντιστρέφεται.

3ος τρόπος: Για κάθε $x_1,x_2\in(2,+\infty)$ με $x_1\neq x_2\Rightarrow x_1-2\neq x_2-2\Rightarrow \ln(x_1-2)\neq\ln(x_2-2)\Rightarrow$

$\Rightarrow 2\ln(x_1-2)\neq 2\ln(x_2-2)\Rightarrow 2\ln(x_1-2)-1\neq 2\ln(x_2-2)-1\Rightarrow h(x_1)\neq h(x_2)$ άρα η h είναι 1-1 και αντιστρέφεται.

<u>Στην συνέχεια θα βρούμε την αντίστροφη με δύο τρόπους:</u>

1ος τρόπος: (Με χρήση μονοτονίας)

Επειδή η h συνεχής και $h\nearrow(2,+\infty)$ τότε $h((2,+\infty))=\left(\lim\limits_{x\to2^+}h(x),\lim\limits_{x\to+\infty}h(x)\right)=\mathbb{R}$ γιατί

$\lim\limits_{x\to2^+}\left[\ln(x-2)\right]\overset{x-2=u}{\underset{u\to0^+}{=}}\lim\limits_{u\to0^+}(\ln u)=-\infty$ και $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\ln(x-2)\right]\overset{x-2=u}{\underset{u\to+\infty}{=}}\lim\limits_{u\to+\infty}(\ln u)=+\infty$.

Για κάθε $x \in (2,+\infty)$ και $y \in \mathbb{R}$ είναι $h(x) = y \Leftrightarrow 2\ln(x-2) - 1 = y \Leftrightarrow 2\ln(x-2) = y+1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \ln(x-2) = \dfrac{y+1}{2} \Leftrightarrow x - 2 = e^{\frac{y+1}{2}} \Leftrightarrow x = e^{\frac{y+1}{2}} + 2 \Leftrightarrow h^{-1}(y) = e^{\frac{y+1}{2}} + 2$, $y \in \mathbb{R}$

Άρα $h^{-1}(x) = e^{\frac{x+1}{2}} + 2$, $x \in \mathbb{R}$.

2ος τρόπος: (Χωρίς χρήση μονοτονίας)

Για κάθε $x \in (2,+\infty)$ είναι $h(x) = y \Leftrightarrow 2\ln(x-2) - 1 = y \Leftrightarrow 2\ln(x-2) = y+1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \ln(x-2) = \dfrac{y+1}{2} \Leftrightarrow x - 2 = e^{\frac{y+1}{2}} \Leftrightarrow x = e^{\frac{y+1}{2}} + 2$

Πρέπει $x > 2 \Leftrightarrow e^{\frac{y+1}{2}} + 2 > 2 \Leftrightarrow e^{\frac{y+1}{2}} > 0$ ισχύει για κάθε $y \in \mathbb{R}$, δηλαδή $h^{-1}(y) = e^{\frac{y+1}{2}} + 2$, $y \in \mathbb{R}$.

Άρα $h^{-1}(x) = e^{\frac{x+1}{2}} + 2$, $x \in \mathbb{R}$.

Β4. Η συνάρτηση $f(x) = \left(h^{-1}(x) - 3\right)\cdot\left(x^3 - 8\right) = \left(e^{\frac{x+1}{2}} - 1\right)\cdot\left(x^3 - 8\right)$ είναι συνεχής στο $[-1,2]$ ως σύνθεση και πράξεις συνεχών συναρτήσεων και παραγωγίσιμη στο $(-1,2)$ με παράγωγο

$f'(x) = \dfrac{1}{2}e^{\frac{x+1}{2}}\left(x^3 - 8\right) + 3x^2\left(e^{\frac{x+1}{2}} - 1\right)$. Είναι $f(-1) = 0 = f(2)$ άρα η f ικανοποιεί τις του θεωρήματος Rolle στο διάστημα $[-1,2]$.

Θέμα Γ

Δίνεται η συνάρτηση $f:[0,3] \to \mathbb{R}$ με τύπο $f(x) = \dfrac{x}{e^x}$.

Γ1. Να μελετήσετε την συνάρτηση f ως προς την μονοτονία και τα ακρότατα (τοπικά και ολικά).

Μονάδες 6

Γ2. Να μελετήσετε την συνάρτηση f ως προς την κυρτότητα και τα σημεία καμπής.

Μονάδες 6

Γ3. Με βάση τα ερωτήματα Γ1 και Γ2 να παραστήσετε γραφικά την συνάρτηση f.

Μονάδες 6

Γ4. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f , τον άξονα των x και τις ευθείες $x = 0$ και $x = 1$.

Μονάδες 7

Λύση

Γ1. Η f είναι συνεχής στο $[0,3]$ και παραγωγίσιμη στο $(0,3)$ με $f'(x) = \dfrac{e^x - xe^x}{e^{2x}} = \dfrac{1-x}{e^x}$

Για κάθε $x \in (0,1)$ είναι $f'(x) > 0$ και η f συνεχής στο $[0,1]$ άρα $f \nearrow [0,1]$.

Για κάθε $x \in (1,3)$ είναι $f'(x) < 0$ και η f συνεχής στο $[1,3]$ άρα $f \searrow [1,3]$.

Η f παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο για $x = 0$ το $f(0) = 0$ και για $x = 3$ το $f(3) = \dfrac{3}{e^3}$. Συγκεκριμένα το $f(0) = 0$ είναι ολικό ελάχιστο. Επίσης η f παρουσιάζει ολικό μέγιστο για $x = 1$ το $f(1) = \dfrac{1}{e}$.

Γ2. Η f' είναι παραγωγίσιμη στο $(0,3)$ με $f''(x)=\dfrac{-e^x-(1-x)e^x}{e^{2x}}=\dfrac{-1-1+x}{e^x}=\dfrac{x-2}{e^x}$.

Για κάθε $x\in(0,2)$ είναι $f''(x)<0$ και η f συνεχής στο $[0,2]$ άρα $f\frown[0,2]$.

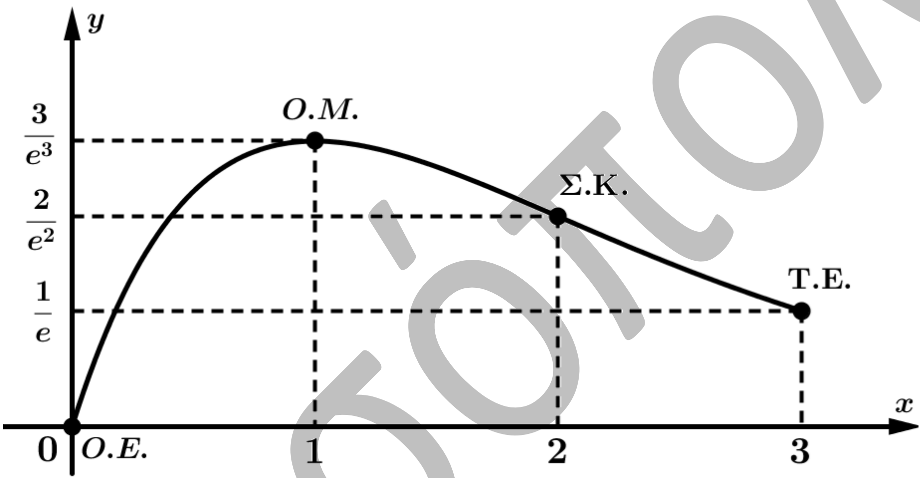
Για κάθε $x\in(2,3)$ είναι $f''(x)>0$ και η f συνεχής στο $[2,3]$ άρα $f\smile[2,3]$.

Η f έχει σημείο καμπής το $A(2,f(2))\equiv A\left(2,\dfrac{2}{e^2}\right)$.

Γ3.

x	$-\infty$	0	1	2	3	$+\infty$
$f'(x)$		+	−	−		
$f''(x)$		−	−	+		
f						

Ο.Ε. **Ο.Μ.** **Σ.Κ.** **Τ.Ε.**



Γ4. Το ζητούμενο εμβαδόν είναι $E(\Omega)=\int_0^1|f(x)|dx$ και επειδή $f(x)\geq 0$ για κάθε $x\in[0,3]$ είναι

$$E(\Omega)=\int_0^1 f(x)dx=\int_0^1\frac{x}{e^x}dx=\int_0^1 xe^{-x}\,dx=-\int_0^1 x\left(e^{-x}\right)'dx=-\left[xe^{-x}\right]_0^1+\int_0^1 e^{-x}\,dx=$$

$$=-\left[xe^{-x}\right]_0^1+\int_0^1 e^{-x}\,dx=-\frac{1}{e}+\left[-e^{-x}\right]_0^1=-\frac{1}{e}-\frac{1}{e}+1=1-\frac{2}{e}=\frac{e-2}{e}\ \text{τ.μ.}$$

Θέμα Δ

Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση f με $f(x)=\begin{cases} e^{x+1}+\lambda x, & x<-1 \\ \dfrac{\alpha x+\alpha}{x+\alpha}, & x\geq -1\end{cases}$, **όπου** $\alpha>1$ **και** $\lambda\in\mathbb{R}$.

Δ1. Να αποδείξετε ότι λ = 1.

Μονάδες 5

Δ2. Να αποδείξετε ότι α = 2 (μονάδες 5) και στη συνέχεια να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο σημείο $A(-1,0)$ **(μονάδες 3).**

Μονάδες 8

Δ3. Να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f.

Μονάδες 7

Δ4. Να αποδείξετε ότι: $f(\eta\mu x-2)\geq 2\eta\mu x-2$ **για κάθε** $x\in\mathbb{R}$.

Μονάδες 5

Λύση

Δ1. Η f ως παραγωγίσιμη είναι και συνεχής στο $\mathbb{R}$ άρα συνεχής στο $x_0 = -1$.

Συνεπώς είναι $\lim_{x \to -1^-} f(x) = \lim_{x \to -1^+} f(x) = f(-1) \Leftrightarrow \lim_{x \to -1^-} \left(e^{x+1} + \lambda x\right) = \lim_{x \to -1^+} \dfrac{\alpha x + \alpha}{x + \alpha} = 0 \Leftrightarrow 1 - \lambda = 0 \Leftrightarrow \lambda = 1$

Δ2. Είναι $\lim_{x \to -1^-} \dfrac{f(x) - f(-1)}{x+1} = \lim_{x \to -1^-} \dfrac{e^{x+1} + x}{x+1} \underset{DLH}{\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}} \lim_{x \to -1^-} \dfrac{e^{x+1} + 1}{1} = 2$ και

$$\lim_{x \to -1^+} \frac{f(x) - f(-1)}{x+1} = \lim_{x \to -1^+} \frac{\frac{\alpha x + \alpha}{x + \alpha}}{x+1} = \lim_{x \to -1^+} \frac{\alpha \cancel{(x+1)}}{\cancel{(x+1)}(x+\alpha)} = \frac{\alpha}{\alpha - 1}$$

Αφού η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = -1$ τότε: $\lim_{x \to -1^-} \dfrac{f(x) - f(-1)}{x+1} = \lim_{x \to -1^+} \dfrac{f(x) - f(-1)}{x+1} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \dfrac{\alpha}{\alpha - 1} = 2 \Leftrightarrow \alpha = 2\alpha - 2 \Leftrightarrow \alpha = 2$.

Είναι $f'(-1) = \lim_{x \to -1^-} \dfrac{f(x) - f(-1)}{x+1} = 2$ άρα η εξίσωση της εφαπτόμενης της C_f στο $A(-1,0)$ είναι $y - f(-1) = f'(-1)(x+1) \Leftrightarrow y = 2x + 2$.

Δ3. Η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ άρα δεν έχει κατακόρυφες ασύμπτωτες.

Είναι $\lim_{x \to -\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim_{x \to -\infty} \dfrac{e^{x+1} + x}{x} = \lim_{x \to -\infty} \left(e^{x+1} \cdot \dfrac{1}{x} + 1\right) = 0 \cdot 0 + 1 = 1$ και $\lim_{x \to -\infty} \left(f(x) - x\right) = \lim_{x \to -\infty} \left(e^{x+1}\right) = 0$ άρα η C_f έχει την ευθεία $y = x$ πλάγια ασύμπτωτη στο $-\infty$.

Είναι $\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \dfrac{2x+2}{x+2} \underset{DLH}{\overset{\left(\frac{+\infty}{+\infty}\right)}{=}} \lim_{x \to +\infty} \dfrac{2}{1} = 2$ άρα η C_f έχει την ευθεία $y = 2$ ασύμπτωτη στο $+\infty$.

Δ4. 1ος τρόπος: Είναι $f(\eta\mu x - 2) \geq 2\eta\mu x - 2 \Leftrightarrow f(\eta\mu x - 2) \geq 2(\eta\mu x - 2) + 2$.

Η f είναι συνεχής και δύο φορές παραγωγίσιμη στο $(-\infty, -1]$ με $f'(x) = e^x + 1$ και $f''(x) = e^x > 0$ άρα η f είναι κυρτή στο $(-\infty, -1]$. Συνεπώς βρίσκεται πάνω από την εφαπτομένη της στο $A(-1,0)$, στο διάστημα $(-\infty, -1]$, με εξαίρεση το σημείο επαφής. Δηλαδή $f(x) \geq 2x + 2$ για κάθε $x \leq -1$.

Για x το $\eta\mu x - 2 \leq -1$ προκύπτει $f(\eta\mu x - 2) \geq 2\eta\mu x - 2$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

2ος τρόπος: Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει $e^x \geq x + 1$. Για x το $x + 1$ είναι $e^{x+1} \geq x + 2 \Leftrightarrow e^{x+1} + x \geq 2x + 2$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, άρα για κάθε $x \leq -1$ είναι $f(x) \geq 2x + 2$.

Για x το $\eta\mu x - 2 \leq -1$ προκύπτει $f(\eta\mu x - 2) \geq 2\eta\mu x - 2$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.